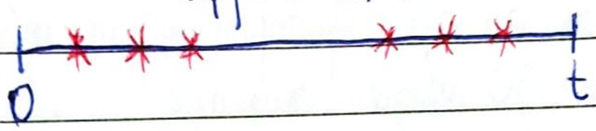
22/11/19

Κατανομή Poisson

Η τ.μ $X \sim P(\lambda)$, $\lambda > 0$ αν η σ.π της X είναι: $\boxed{P_X(x) = \frac{e^{-\lambda}\lambda^x}{x!}}$, $x = 0,1,2,\dots$

Θεωρούμε μια κατάσταση που εξελίσσεται στον χρόνο και που σε κάποιες χρονικές στιγμές πραγματοποιούνται κάποια χαρακτηριστικά του φαινομένου που συμβολίζονται με * και ονομάζονται αφίξεις. Μια τέτοια κατάσταση ονομάζεται διαδικασία. (πχ αφίξεις πελατών σε supermarket)

αφίξεις Poisson



Ενδιαφέρον: Το πλήθος των αφίξεων στο χρονικό διάστημα $(0,t]$

Έστω $X(t)$ πλήθος των αφίξεων στο διάστημα $(0,t]$
Το πλήθος $X(t)$ είναι μια τ.μ με δυνατές τιμές $x = 0,1,2,\dots = \mathbb{N}$

Μπορεί να αποδειχθεί ότι κάτω από κάποιες συνθήκες η σ.π της $X(t)$ είναι:

$$P_{X(t)}(x) = P(X(t) = x) = \boxed{\frac{e^{-\lambda t}(\lambda t)^x}{x!}}, \quad x = 0,1,2,\dots$$

και ~~συμβολίζεται~~ επομένως $X(t) \sim P(\lambda t)$

λ = ρυθμός των αφίξεων, ο μέσος όρος των αφίξεων στο $(0,t]$

ΠΑΡΑΤΗΡΗΣΗ

Αν $t=1$ είναι η μονάδα του χρόνου τότε η $X(t)$ συμβολίζεται απλά με X και $X \sim P(\lambda)$

Συμβουλή

Ορίζουμε την τ.μ X στη μονάδα χρόνου της ζητούμενης πιθανότητας

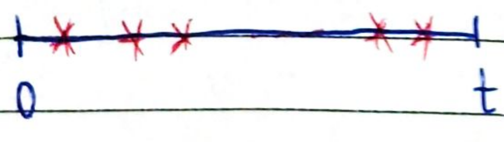
Π.Χ

Ο ρυθμός αφίξεων κλήσεων στο κέντρο εξυπηρέτησης μιας τηλεφωνικής εταιρεία είναι 30 κλήσεις ανά ώρα

α) P(καμιας κλήσης σε διάστημα 3 λεπτών)

β) P(περισσότερων από 5 κλήσεων σε διάστημα 5 λεπτών)

ΛΥΣΗ



α) Έστω X η τ.μ που παριστά τον αριθμό των κλήσεων στα 3min (μονάδα χρόνου τα 3min)

Η $X \sim P(\lambda)$, $\lambda = ?$

Για 60min έχω 30 κλήσεις
3min $\lambda = ?$

$$\lambda = \frac{3 \cdot 30}{60} = 1,5$$

Άρα, $X \sim P(\lambda = 1,5)$, $P_X(x) = \frac{e^{-1,5} \cdot 1,5^{x}}{x!}$

$P(\text{καμία κλήση}) = P(X=0) = P_X(0) = \frac{e^{-1,5} \cdot 1}{0!} = \boxed{e^{-1,5}}$

β) Έστω η X τμ που παριστά τον αριθμό των κλήσεων για 5min (μονάδα χρόνου τα 5min)

Η $X \sim P(\lambda)$, $\lambda = ?$

Για 60min 30 κλήσεις
5min $\lambda = ?$

$$\boxed{\lambda = 2.5}$$

Άρα, $X \sim P(\lambda = 2,5)$, $P_X(x) = \frac{e^{-2.5} \cdot 2.5^{x}}{x!}$

$P(\text{περισσότερες από 5 κλήσεις}) = P(\underbrace{X \geq 5}_{\text{ή } P(X=5) \text{ ή } P(X=6) \text{ ή } \ldots}) = 1 - P(X<5) = 1 - \sum_{x=0}^{4} P_X(x)$

$= 1 - \sum_{x=0}^{4} \frac{e^{-2,5} \cdot 2,5^{x}}{x!}$

SKAG

Πχ

Φύονται στην τύχη περίπου 100 δέντρα ανά στρέμμα (1 στρέμμα $\simeq$ 1000 τ.μ). Ποια η πιθανότητα σε μια περιοχή 50 τ.μ

α) Να υπάρχουν λιγότερα από 8 δένδρα

β) -ll- μεταξύ τριών και 5 δένδρων

ΛΥΣΗ

Δεν είναι φαινόμενο που εξελίσσεται στον χρόνο αλλά στην επιφάνεια.

δένδρο $\equiv$ άφιξη

Μπορεί να παρομοιαστεί με διαδικασία Poisson που εξελίσσεται (όχι στο χρόνο) στην επιφάνεια

Έστω X η τ.μ παριστά πλήθος των δένδρων που φύονται στην τύχη σε μονάδα επιφάνειας τα $50m^2$

Τότε $X \sim P(\lambda)$, $P_X(x) = \dfrac{e^{-\lambda} \cdot \lambda^x}{x!}$

Στα $1000m^2$ έχω 100 δέντρα

$50m^2$ $\lambda = ?$

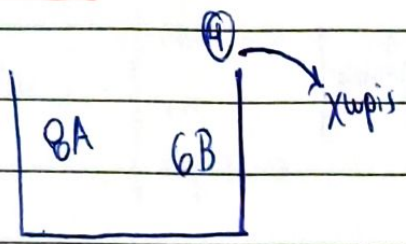
Άρα

$\boxed{\lambda = 5}$ άρα $P_X(x) = \dfrac{e^{-5} 5^x}{x!}$, $x = 0, 1, \ldots$

α) $P(X<8)=\sum_{x=0}^{7} p_X(x)=\dots$

β) $P(3\leq X\leq 5)=\sum_{x=3}^{5} p_X(x)=\dots$

ΑΣΚΗΣΗ 4.62



α) $P\left(\text{οπαδοί της Α να είναι τριπλάσιοι των οπαδών της Β}\right)$

β) Αν η διαδικασία επαναληφθεί 5 φορές $P\left(\text{ακριβώς 2 φορές οι οπαδοί της Α να είναι 3πλάσιοι των οπαδών της Β}\right)$

γ) $P\left(\text{η διαδικασία να επαναληφθεί τρεις φορές έως όπου για πρώτη φορά οι οπαδοί της Α τριπλάσιοι των οπαδών της Β}\right)$

α) $P\left(\begin{matrix}\text{3 από την Α}\\ \text{και}\\ \text{1 από την Β}\end{matrix}\right)=\dfrac{\binom{8}{3}\cdot\binom{6}{1}}{\binom{14}{4}}=0{,}3357$

Υπεργεωμετρική Κατανομή

Έστω X τ.μ. παριστά πλήθος οπαδών της Α στους 4 που επιλέχθηκαν

Τότε $X \sim Hg(M=8, N=6, n=4)$

σπ X $P_X(x) = \dfrac{\binom{M}{x} \cdot \binom{N}{n-x}}{\binom{M+N}{n}}$

εφαρμόσει για $x=3$.

β) Έστω $E = \left\{ \begin{array}{l} \text{οι οποίοι της A τριπλάσιοι} \\ \text{των οποίων της B} \end{array} \right\}$

Έστω Y τ.μ παριστά πλήθος E στις $n=5$ επαναλ.

$Y \sim B(5, p = P(E) \approx 0{,}3357)$

$P_Y(y) = \binom{5}{y} (0{,}3357)^y \cdot (1-0{,}3357)^{5-y}$, $y = 0, \ldots, 5$

$P(Y=3) = P_Y(3) = \ldots$

γ) Έστω τ.μ Z παριστά πλήθος επαναλήψεων μέχρι την 1η E.

$Z \sim Geo(p)$

$P_Z(z) = (1-p)^{z-1} \cdot p$, $z = 1, 2, \ldots$

$p = P(E) = 0{,}3357$

SKAG

$$= P(Z=3) = P_Z(3) = (1-0{,}3357)^{z-1} \cdot 0{,}3357 = \ldots$$

ΑΣΚΗΣΗ 4.6.1

P(Μεταξύ πέντε οικογενειών με έξι παιδιά η καθεμία, τουλάχιστον τρεις οικογένειες να έχουν τέσσερα ή περισσότερα κορίτσια) $= P(X \geq 3) = P(X=3$ ή $X=4$ ή $X=5)$

$$= P_X(3) + P_X(4) + P_X(5)$$

$$= \sum_{x=3}^{5} \binom{5}{x} \cdot p^x (1-p)^{5-x}$$

$$= \sum_{x=3}^{5} \binom{5}{x} \cdot \left(\frac{11}{32}\right)^x \cdot \left(1-\frac{11}{32}\right)^{5-x}$$

Έστω $E = \{$Μια (από τις πέντε) οικογένεια να έχει 4 ή περισσότερα κορίτσια$\}$

Έστω X τμ. παριστά το πλήθος των E

(δηλ. το πλήθος των οικογ. στις πέντε που έχουν 4 ή περισσ. κ.)

$X \sim B(n=5,\ p=P(E)=?)$ όποτε $P_X(x) = \binom{5}{x} \cdot p^x (1-p)^{5-x}$, $x = 0, 1, \ldots, 5$

$p = P(E) = P$(Μια οικογένεια με 6 παιδιά να έχει 4 ή περισσότερα κορίτσια)

Για να βρω το p σκέφτομαι ως εξής:

Ελέγχω τα παιδιά μιας οικογ. με 6 παιδιά

Σε κάθε έλεγχο (επανάληψη) από τα 6 έχω:

$E^* = \{$κορίτσι$\}$, $A^* = \{$Αγόρι$\}$

Έστω Y το πλήθος των E (κοριτσιών) στους 6 ελέγχους

$$Y \sim B\left(n=6,\ p^* = P(E^*) = \frac{1}{2}\right)$$

$$p = P(E) = P(Y \geq 4) = \sum_{y=4}^{6} \binom{6}{y} \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^y \cdot \left(1-\frac{1}{2}\right)^{6-y} = \frac{11}{32}$$

SKAG